

Mathématiques Financières

Chapitre 0 : Rappel Suites Mathématiques

Pr. Fatima-Zahra AAZI
FSJES - AC

Sciences Économiques et Gestion (S2)
Ensembles {9, 10}

2019 - 2020

Définition

Une suite mathématique est une succession de valeurs.

Généralement notée U_n ou $U(n)$, c'est une application de l'ensemble N dans R . Elle associe à chaque élément $n \in N$ un terme unique noté U_n , appelé **terme d'indice n de la suite U_n** .

Définition

Une suite peut être **explicite** ou définie **par récurrence**.

Par explicite on entend qu'elle est définie directement à partir de son indice n (en fonction de n).

Exemple :

$$U_n = \frac{2}{1+n}, \quad V_n = \ln(1+n), \quad W_n = 5n^2 + 3$$

Pour toute ces suites, on peut calculer un terme en connaissant son indice n :

$$U(6) = \frac{2}{1+6} = \frac{2}{7}$$

Définition

Une suite peut aussi être définie par récurrence. C'est le cas où chaque terme U_{n+1} peut être défini à partir du terme précédent U_n .

Exemple :

$$U_{n+1} = 2U_n + 9$$

avec $U_0 = 1$

$$U_1 = 2U_0 + 9 = 2 \times 1 + 9 = 11$$

$$U_2 = 2U_1 + 9 = 2 \times 11 + 9 = 31$$

Sens de variation d'une suite

Une suite est croissante si :

$$U_{n+1} > U_n$$

dans le cas contraire, elle est décroissante.

Suites arithmétiques

Une suite $U(u)$ est une suite arithmétique si : $\forall n \in \mathbb{N}$

$$U_{n+1} = U_n + r$$

($r \in \mathbb{R}$) est appelé la raison de la suite.

Cela implique que chaque terme peut être calculé à partir du terme précédent en rajoutant toujours **la même constante r** .

Suites arithmétiques - Exercice 1

- 1 Montrer que la suite U_n définie par $U_n = 3n+6$ est arithmétique
- 2 Les nombres suivants sont ils des termes d'une suite arithmétique : 207, 266, 325
- 3 Même question pour les nombres : 326, 384, 500
- 4 Donner le terme général U_n de la suite arithmétique de raison 6 et du terme $U_2 = 15$
- 5 La suite suivante $U_{n+1} + U_n = 5$ avec $U_0 = 5$ est elle arithmétique ?

Suites arithmétiques

Calculer le terme U_{50} de la suite $U_{n+1} = U_n + r$ avec $r = 3$?

Suites arithmétiques

Calculer le terme U_{50} de la suite $U_{n+1} = U_n + r$ avec $r = 3$?

$$U_{50} = U_{49} + r \text{ et } U_{49} = U_{48} + r \dots \text{etc.}$$

Donc pour calculer $U(50)$ on aura besoin de calculer tous les termes précédents.

Est ce qu'on ne peut pas calculer un terme ($U(50)$ par exemple) en fonction de n'importe quel autre terme et pas forcément à partir du précédent ?

Suites arithmétiques

Cela est tout à fait possible à travers la règle :

$$U_n = U_0 + n \times r$$

ou

$$U_n = U_p + (n - p) \times r$$

Donc si U_n est une suite **arithmétique** de premier terme $U_0 = 2$ et de raison $r = 3$, on peut calculer $U(50)$ par :

$$U(50) = 2 + 50 \times 3 = 152$$

Et en fonction de $U(10)$, on peut écrire :

$$U(50) = U(10) + (50 - 10) \times 3$$

Exercice 2

Soit $U(n)$ une suite arithmétique de raison r .

- 1 Soit U_n une suite arithmétique de raison $r = -2$ et $U_0 = 6$, calculer U_{17}, U_{30}
- 2 Calculer r si $U(0) = 5$ et $U(2) = 11$.
- 3 Si les nombres $4, 9$ et 22 sont les trois premiers termes d'une suite U_n , s'agit il d'une suite arithmétique? Si oui, donner la raison r ?

Suites arithmétiques

Une autre propriété des suites **arithmétiques** est la règle de calcul de la somme (S) des termes de la suite :

$$S = U_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_n$$

$$S = \text{nombre des termes} \times \frac{\text{premier terme} + \text{dernier terme}}{2}$$

Avec :

Nombre de termes = indice du dernier terme - indice du premier terme + 1

Pour S : Nombre de termes = $n - 0 + 1 = n + 1$

Suites arithmétiques - Exemple

Calculer la somme des termes de la suite U_n définie par :
 $U_n = 3n + 6$.

Suites géométriques

Une suite $V(u)$ est une suite géométrique si :

$$\forall n \in \mathbb{N}$$

$$V_{n+1} = V_n \times q$$

avec $V_0 = a$

q est appelé la raison de la suite.

Cela implique que chaque terme peut être calculé à partir du terme précédent en multipliant toujours par **la même constante q** .

Suites géométriques

Une suite géométrique possède également des propriétés permettant de déduire la valeur d'un terme à partir d'un terme précédent et pour le calcul de la somme des termes.

$$V_n = V_0 \times q^n$$

et

$$S = V_0 + V_1 + V_2 + \dots + V_n$$

$$S = \text{Premier terme} \times \frac{1 - q^{\text{nombre de termes}}}{1 - q}$$

Exercice 3

Le contrat de location d'un magasin propose deux formules (pour un loyer initial de 4000 Dh) :

Formule 1 : Augmentation du montant du loyer de 250Dh chaque année

Formule 2 : Augmentation du montant du loyer de 4% chaque année

- 1 Calculer, pour chacune des deux formules, le loyer des années 1, 2, 3 et celui de l'année n .
- 2 Quel est le montant que le locataire aura-t-il payé au bout de 10 ans dans chaque formule.

Introduction - Mathématiques Financières

Définitions

Préteur : Celui qui prête (donne) l'argent (banque par exemple)

Emprunteur : Celui qui reçoit l'argent (client par exemple)

Intérêt

L'intérêt est le montant payé par l'emprunteur ou produit par un capital en cas d'un placement. C'est une sorte de loyer de l'argent. Les intérêts constituent une dépense pour l'emprunteur et un revenu pour le prêteur.

Définitions

Taux intérêt

Un taux d'intérêt (généralement annuel) désigne l'intérêt payé (ou produit) pour chaque dirham emprunté (placé) pendant un an. Un taux d'intérêt annuel de 0.15 ou 15% indique que chaque dirham produit 0.15Dh après un an, autrement dit, à la fin de l'année, le capital de départ de 1Dh devient 1.15Dh.

Valeur acquise

Dans le cas d'un placement, un taux d'intérêt annuel de 15% implique qu'on gagne 15 Dh pour chaque 100Dh. A la fin de l'année, 100Dh placé devient 115 Dh : Ce montant est appelé la valeur acquise (le capital initial + les intérêts).

Définitions

Taux intérêt

Pour le calcul des intérêts ou de la valeur acquise, on distingue deux modes de calcul :

- l'intérêt simple utilisé généralement pour le court terme
- l'intérêt composé pour le long terme (plus d'un an)

Exercice

Un individu place un capital initial $C_0 = 4000Dh$ à un taux annuel de 5%. Les intérêts sont calculés sur la base du capital initial C_0 . On note C_n le capital ou la valeur acquise au bout de n années.

- 1 Calculer le capital de l'individu au bout d'une année.
- 2 Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $C_{n+1} = C_n + 200$. Qu'est ce qu'on en déduit ?
- 3 Exprimer C_n en fonction de n et de C_0 , $\forall n \in \mathbb{N}$.
- 4 Calculer C_{10} .
- 5 Quelle sera la valeur acquise au bout de 12 ans de placement ?
- 6 Au bout de combien d'années le capital sera-t-il doublé ?